Elementy teorii mnogości

Wykład

Zbiory składają się z elementów. Zbiory będziemy oznaczali dużymi literami alfabetu. Fakt, że x jest elementem zbioru A zapisujemy symbolicznie w postaci $x \in A$. Natomiast, jeżeli y nie jest elementem tego zbioru, to piszemy $y \notin A$. Zbiory będziemy określali przez wyliczenie ich elementów albo przez podanie warunku W, który mają spełniać jego elementy x. Piszemy wtedy

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}, \quad \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \quad \text{albo } \{x : W(x)\}.$$

Zbiór, który nie ma żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy przez $\emptyset$.

Przykład 1.

$$\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \quad \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \quad \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leqslant x < 5\}.$$

Definicja 1. (*podzbiór*)
Jeżeli każdy element zbioru A jest jednocześnie elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B. Fakt ten zapisujemy symbolicznie w postaci $A \subset B$. Mamy zatem

$$A \subset B \Longleftrightarrow [(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)] \quad \text{dla każdego } x \in A.$$

Jeśli przy tym $A \neq B$, to mówimy, że A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B. Oczywiście $\emptyset \subset A$ oraz $A \subset A$ dla każdego zbioru A.

Rysunek 1. *Zawieranie zbiorów.*

Definicja 2. (*suma mnogościowa*)
Sumą mnogościową zbiorów A i B nazywamy zbiór, który składa się ze wszystkich elementów zbioru A oraz ze wszystkich elementów zbioru B. Sumę zbiorów A i B oznaczmy symbolem $A \cup B$. Mamy zatem

$$(x \in A \cup B) \Longleftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)].$$

W podobny sposób określa się sumę mnogościową większej liczby zbiorów.

Rysunek 2. *Suma mnogościowa zbiorów.*

Definicja 3. (*iloczyn mnogościowy*)
Iloczynem mnogościowym zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony tylko z tych

elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \cap B$. Mamy zatem

$$(x \in A \cap B) \Longleftrightarrow [(x \in A) \wedge (x \in B)] \, .$$

W podobny sposób określa się iloczyn mnogościowy większej liczby zbiorów.

Rysunek 3. *Iloczyn mnogościowy zbiorów.*

Definicja 4. (*zbiory rozłączne*)
Mówimy, że zbiory A i B są rozłączne, gdy ich iloczyn jest zbiorem pustym, tzn. $A \cap B = \emptyset$.

Rysunek 4. *Zbiory rozłączne.*

Definicja 5. (*różnica mnogościowa*)
Różnicą mnogościową zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony tylko z tych elementów zbioru A, które nie należą do B. Różnicę zbiorów A i B oznaczamy przez $A \backslash B$.

Rysunek 5. *Różnica mnogościowa zbiorów.*

Definicja 6. (*różnica symetryczna*)
Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Różnicę symetryczną zbiorów A i B oznaczamy przez $A \div B$. Oczywiście dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość

$$A \div B = B \div A.$$

Rysunek 6. *Różnica symetryczna zbiorów.*

Definicja 7. (*dopełnienie*)
Niech X będzie ustalonym zbiorem zwanym przestrzenią oraz niech A będzie dowolnym podzbiorem tej przestrzeni. Dopełnieniem zbioru A względem przestrzeni X nazywamy zbiór $X \backslash A$ i oznaczamy go symbolem A'. Oczywiście $(A')' = A$. Ponadto $\emptyset' = X$ i $X' = \emptyset$.

Rysunek 7. *Dopełnienie zbiorów.*

Własności działań na zbiorach

Własność	**Nazwa**
$A \cup B = B \cup A$	przemienność dodawania zbiorów
$A \cap B = B \cap A$	przemienność mnożenia zbiorów
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	prawo de Morgana dla sumy zbiorów
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	prawo de Morgana dla iloczynu zbiorów
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	rozdzielność dodawania względem mnożenia zbiorów
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	rozdzielność mnożenia względem dodawania zbiorów
$A \subset B \iff B' \subset A'$	
$[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow (A \subset C)$	przechodniość zawierania zbiorów
$[(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \iff (A = B)$	warunek równoważny równości zbiorów
$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = X$	

Ćwiczenie 1. *Zaznaczyć na osi liczbowej zbiory* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ *i* $A \div B$ *dla:*
a) $A = (-2, 1], \quad B = [-1, 3)$;
b) $A = [1, 4], \quad B = (3, 5)$.

Ćwiczenie 2. *Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiory* $A \cup B$, $A \cap B$ *i* $A \div B$ *dla:*
a) $A = \{(x, y) : x \in (1, 2) \wedge y \in (2, 3)\}$, $B = \{(x, y) : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 1\}$;
b) $A = \{(x, y) : |x| < |y|\}$, $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Definicja 8. (*iloczyn kartezjański*)
Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y) dla których $x \in A$ i $y \in B$. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \times B$. Mamy zatem

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

W podobny sposób określa się iloczyn kartezjański większej liczby zbiorów. Jeżeli $A = B$, to zamiast $A \times A$ będziemy pisali A^2, np. $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Rysunek 8. *Iloczyn kartezjański zbiorów.*

Przykład 2. *a) Iloczyn kartezjański zbiorów* $[1, 5) \times \{1, 2, 3\}$;
b) Iloczyn kartezjański $A \times B \times C$.

Ćwiczenie 3. *Podać interpretację geometryczną w układzie współrzędnych zbiorów $A \times B$:*
a) $A = (1, 2], \quad B = [-1, 3)$;
b) $A = \{2, 3\}\,, \quad B = \{1\} \cup (2, 3)$;
c) $A = \{x : 0 \leqslant x < 1 \vee 2 < x \leqslant 3\}\,, \quad B = \{x : 1 < x < 2 \vee 3 < x \leqslant 4\}\,.$